Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

BREVE APUNTE SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

D. Prelat - 2020

§1. INTRODUCCIÓN.

La cantidad de libros escritos sobre ecuaciones diferenciales alcanzaría para completar bibliotecas enteras. Es un tema inmenso, que se estudia desde el inicio mismo del cálculo infinitesimal, en el siglo XVII. Cuando Isaac Newton (1643 - 1727) formula en términos matemáticos una de sus leyes fundamentales, $fuerza = masa \times aceleración$, está planteando las primeras ecuaciones diferenciales de la historia. En realidad, se trata de un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Pero parece que el mismo Don Isaac ya plantea una ecuación diferencial en derivadas parciales, en su «Método de las fluxiones» (1671). (Nunca dejo de asombrarme…). Luego siguen Euler, Laplace, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Gauss, Riemann, Dirichlet, Weierstrass, Hilbert, … (detengo la lista en 1943, año del fallecimiento de Hilbert, pero no termina ahí, obviamente). Mi profesión y mi nacionalidad me impulsan a mencionar un par de matemáticos muy importantes que se destacaron en este tema durante el siglo XX. Uno es Alberto Pedro Calderón (1920 - 1998), «un matemático argentino considerado como uno de los más importantes del siglo XX ». El otro es un discípulo suyo, Luis Ángel Caffarelli (nacido en 1948): «matemático argentino, con doble ciudadanía, nacionalizado y radicado en Estados Unidos. Líder en el campo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y sus aplicaciones» (Ambas menciones están citadas - textual e intencionalmente - de la enciclopedia más popular de los últimos tiempos).

No es sorprendente, por lo tanto, que un curso sobre este tema, exclusivamente, pueda durar varios cuatrimestres. Aquí no podemos, entonces, hacer más que mencionar algunos pocos - pero muy importantes - problemas de la física matemática que involucran ecuaciones diferenciales. La lista es bien cortita. Algunas leves variaciones pueden aparecen en las guías de ejercicios, con la idea de que el alumno pueda practicar los métodos de resolución presentados.

En una ecuación diferencial ordinaria, la función incógnita depende de una sola variable y se presenta en la ecuación con sus derivadas hasta cierto orden (que por definición es el orden de la ecuación). En una ecuación diferencial en derivadas parciales, la función incógnita depende de dos o más variables y se presenta en la ecuación con sus derivadas parciales hasta cierto orden, que también por definición es el orden de la ecuación. Es el momento y lugar para un breve comentario sobre el tipo de dificultades con que nos enfrentamos cuando pasamos de las ecuaciones diferenciales ordinarias a las ecuaciones en derivadas parciales. Los ejemplos de ecuaciones diferenciales que daremos a continuación son los más sencillos: las ecuaciones lineales a coeficientes constantes. Sabemos, por ejemplo, que el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial $y''(x)+y(x)=0$, $x\in\Re$, es $\{c_1y_1+c_2y_2 : c_1\in\Re, c_2\in\Re\}$, donde $y_1(x)=\cos(x)$ e $y_2(x)=sen(x)$. La manera clásica y habitual de expresar esto es diciendo que la *solución general* de la ecuación es $y(x)=c_1\cos(x)+c_2 sen(x)$, donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias. Ya hemos aprendido que cuando la ecuación diferencial es lineal y homogénea, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial de dimensión *n*. En nuestro ejemplo, el conjunto de soluciones es el núcleo del operador lineal $L: C^2(\Re,\Re)\longrightarrow C^0(\Re,\Re)$ tal que $L(y)=y''+y$. Ahora, veamos un ejemplo muy sencillo de una ecuación diferencial en derivadas parciales: $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$

Se ve fácilmente que para cualquier función $f:\Re\longrightarrow\Re$ de clase C^1 en toda la recta, la función $u:\Re^2\longrightarrow\Re$ tal que $u=f(x+y)$ es una solución de la ecuación. Con un poco de trabajo (no mucho), uno puede convencerse de que todas las soluciones de la ecuación son de esta forma, es decir: la *solución general* depende de una *función* arbitraria. Ya que estamos, observemos que este es un ejemplo de ecuación lineal en el siguiente sentido: sea $L: C^1(\Re^2,\Re)\longrightarrow C^0(\Re^2,\Re)$ el operador lineal (= transformación lineal) tal que para cada $u\in C^2(\Re^2,\Re): L(u)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Su núcleo es, precisamente, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación, que por lo tanto resulta ser un subespacio de $C^2(\Re^2,\Re)$. Aquí hay recordar una ventaja práctica evidente de la estructura lineal del conjunto de soluciones: cualquier combinación lineal de soluciones de la ecuación también es una solución. La diferencia - no menor - con las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias es que ahora el núcleo de *L* tiene dimensión infinita: contiene, por ejemplo, las funciones $u_0(x,y)=1$, $u_1(x,y)=x+y$, $u_2(x,y)=(x+y)^2$, $u_3(x,y)=(x+y)^3$, … , $u_k(x,y)=(x+y)^k$, … Es fácil comprobar (ejercicio) que para cualquier $n\in\mathbb{N}$, el sistema $\{u_0,u_1,\ldots,u_n\}$ es linealmente independiente. Un ejemplo sencillo y parecido, pero de segundo orden, es la ecuación $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$, cuya solución general es $u=f(x+y)+g(x-y)$, donde ahora *f* y *g* son dos funciones arbitrarias de clase C^1 en toda la recta real (ver Nota 1 en la página siguiente).

Atención: Si usted está pensando en generalizaciones del tipo «la solución general de una ecuación diferencial en derivadas parciales de orden *n* depende de *n* funciones arbitrarias», le recomiendo intentar escribir con precisión el enunciado. Sería conveniente, por ejemplo, entender el significado de *dependencia funcional* cuando se menciona que una función *u* «depende de *n* funciones arbitrarias ». El concepto *dependencia funcional* (y su dual, el de *independencia funcional*) es un tema más complicado de trabajar que la dependencia lineal y no será tratado en este apunte.

Por último, un ejemplo sencillo de ecuación no lineal en derivadas parciales es el siguiente: $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - 16\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Observe que la suma de las soluciones $u_1(x,y) = x$ y $u_2(x,y) = x^2 y^2$ <u>no</u> es una solución de la ecuación.

***Nota* 1.1** (Sobre la ecuación $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$):

Hagamos el cambio de variables $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(x+y) \\ y = \frac{1}{2}(x-y) \end{cases}$. La función $v(\alpha,\beta) = u(\alpha+\beta, \alpha-\beta)$ verifica $\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \frac{\partial^2 u(\alpha+\beta,\alpha-\beta)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(\alpha+\beta,\alpha-\beta)}{\partial y^2}$ (es una cuenta sencillita). Por lo tanto, $\forall (x,y) \in \Re^2 : \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall (\alpha,\beta) \in \Re^2 : \frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$. Ahora bien, $\forall (\alpha,\beta) \in \Re^2 : \frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$ sii existe una función $h : \Re \longrightarrow \Re$ tal de clase C^1 tal que $\forall (\alpha,\beta) \in \Re^2 : \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = h(\beta)$. Sea $H : \Re \longrightarrow \Re$ una primitiva de *h*. Entonces, $\forall (\alpha,\beta) \in \Re^2 : \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = h(\beta) = \frac{dH(\beta)}{d\beta}$ sii existe una función $K : \Re \longrightarrow \Re$ de clase C^2 tal que $\forall (\alpha,\beta) \in \Re^2$: $v(\alpha,\beta) = K(\alpha) + H(\beta)$. Finalmente, $\forall (x,y) \in \Re^2 : u(x,y) = v\left(\overbrace{\tfrac{1}{2}(x+y)}^{\alpha}, \overbrace{\tfrac{1}{2}(x-y)}^{\beta}\right) =$ $K(\tfrac{1}{2}(x+y)) + H(\tfrac{1}{2}(x-y)) = f(x+y) + g(x-y)$, donde f y g están definidas de la manera obvia: $f(\lambda) = K(\tfrac{1}{2}\lambda)$ y $g(\lambda) = H(\tfrac{1}{2}\lambda)$ para todo $\lambda \in \Re$.

Veamos ahora el tipo de problema que vamos a considerar, recordando primero el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales a coeficientes constantes, que son las más sencillas de todas. Ya hemos estudiado en cursos anteriores problemas como el que sigue:

$$\begin{cases} (i) & y''(t) + y(t) = 0 \\ (ii) & y(0) = y_0 \\ (iii) & y'(0) = y_1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Se trata de un problema clásico y sencillo de una ecuación diferencial con *condiciones iniciales*. En este problema, la solución de la ecuación diferencial (*i*) que interesa es la que satisface las *condiciones iniciales* (*ii*) y (*iii*) , donde y_0 e y_1 son datos del problema: la «posición inicial» y la «velocidad inicial», respectivamente. La terminología recuerda el origen histórico y las aplicaciones clásicas de estos problemas, donde la función y representa una determinada magnitud escalar variable con el tiempo t. Este problema específico es muy sencillo de resolver: la solución general de la ecuación (*i*) es $y(t) = a\cos(t) + b\,sen(t)$, donde a y b pueden ser dos constantes reales cualesquiera. Dado que $y(0) = a$ e $y'(0) = b$, la solución del problema (1.1) es $y(t) = y_0\cos(t) + y_1 sen(t)$. Esto fue realmente sencillo, pero lo que nos interesa destacar es: el problema (1.1) tiene solución, en primer lugar, y tiene una <u>única</u> solución. La <u>existencia</u> y la <u>unicidad</u> de solución de una ecuación diferencial con condiciones iniciales son las propiedades más importantes de un problema asociado con estas ecuaciones, y en este apunte estudiaremos principalmente el tema de la unicidad (en los pocos problemas que presentaremos). La razón de su importancia es muy fácil de entender: si la solución del problema (1.1) representa la evolución de una magnitud física a partir de un instante $t = 0$, la existencia de solución significa que dicha magnitud «existe» en el mundo físico, y la unicidad significa que su evolución queda completamente determinada por su estado en el instante $t = 0$. Es una expresión matemática del *determinismo causal* clásico, postura filosófica sostenida fervientemente por la mayoría de los grandes físicos de la historia, desde Laplace hasta Einstein, entre otros. No todos los problemas tienen solución y es común que tengan más de una. Por ejemplo, si en el problema (1.1) eliminamos la condición (*iii*), se tienen las infinitas soluciones $y(t) = y_0\cos(t) + b\,sen(t)$, donde b puede tomar cualquier valor real. Aquí no se verifica la <u>unicidad</u>. Un ejemplo muy sencillo donde no se verifica la <u>existencia</u> de solución es:

$$\begin{cases} (i) & y''(t) + y(t) = 0 \\ (ii) & y(0) = 0 \\ (iii) & y'(0) = 0 \\ (iv) & y''(0) = 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

Las tres primeras condiciones solo son verificadas por la función nula, como se desprende inmediatamente del cálculo precedente. Pero la función nula no satisface (*iv*), como es de dominio público.

Momento cultural: El estudio de la existencia y la unicidad de la solución de un problema asociado a las ecuaciones diferenciales dio origen al concepto de *problema bien planteado*. Un problema está *bien planteado* cuando tiene solución y es única, pero además se pide que esta solución dependa de manera *continua* de los parámetros del problema. En el ejemplo (1.1), los parámetros son la posición inicial y_0 y la velocidad inicial y_1 es claro que la solución $y(t) = y_0\cos(t) + y_1 sen(t)$ es continua como función de dichos parámetros. Pero en general no es un problema que se resuelva fácilmente, y lo que realmente interesa un tipo de condición más fuerte que la continuidad puntual.

Nosotros nos concentraremos en la existencia y unicidad, y no sería mala idea que el alumno repase los correspondientes teoremas (de existencia y unicidad, precisamente) que ha visto en cursos anteriores de ecuaciones diferenciales ordinarias. Aunque sea los enunciados.

Oro tipo de problema asociado a una ecuación diferencial se denomina *problema de contorno*. Un ejemplo típico es

$$\begin{cases} (i) & y''(x) + y(x) = 0 \quad , 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ (ii) & y(0) = y_0 \\ (iii) & y(\frac{\pi}{2}) = y_1 \end{cases} \tag{1.3}$$

En este problema interesan las soluciones definidas en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, dominio de variación de la variable espacial (no temporal) x y las condiciones (*ii*) y (*iii*) están dadas en el «contorno» de este dominio, es decir: el borde $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ del intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Nuevamente, podemos resolver fácilmente este problema a partir de la solución general $y(x) = a\cos(x) + bsen(x)$ de (*i*), obteniendo $y(x) = y_0 \cos(x) + y_1 sen(x)$. O sea, que este problema también presenta las bondades de la existencia y unicidad. Pero si cambiamos las condiciones de contorno, eligiendo el intervalo $[0, \pi]$ en lugar de $[0, \frac{\pi}{2}]$, las condiciones de contorno son incompatibles si $y_0 \ne -y_1$ (pues $y(0) = a$, $y(\pi) = -a$), caso en que no existe solución; en cambio, si por ejemplo $y_0 = y_1 = 0$, tendríamos las infinitas soluciones $y(x) = bsen(x)$, donde b puede ser cualquier constante real.

Veamos ahora un ejemplo de un problema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con condiciones iniciales y de contorno. Es un problema histórico, pues se trata de la «ecuación de la cuerda vibrante» (o bien: *ecuación de ondas unidimensional*), planteado y resuelto por Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783). Volveremos a mencionar esta ecuación más adelante cuando mencionemos la ecuación de ondas con mayor generalidad. El problema es:

$$\begin{cases} (i) & \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad , 0 < x < 1 \, , t > 0 \\ (ii) & \begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \end{cases} \\ (iii) & u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , t \geq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Veremos ahora, sin demasiado rigor, que este problema tiene solución única. En el apéndice daremos las demostraciones de unicidad para los problemas presentados en este apunte, incluyendo el (1.4). <u>Una consecuencia práctica muy importante de la unicidad es que si se encuentra una solución del problema, por el método que sea, ya se sabe que ésa es la solución</u>. <u>Esta observación la repetiremos varias veces, pues existe una tendencia a justificar innecesariamente cada paso de una resolución de este tipo de problemas como si se estuvieran escapando otras soluciones posibles. NO. Esto no ocurre, obviamente, cuando el problema tiene solución única</u>. En el problema (1.4), el dominio espacial (= dominio de variación de *x*) es el intervalo [0,1] y el dominio temporal (el dominio de variación de *t*) es la semirrecta $[0,+\infty)$. Todo esto es lo que se indica en cada línea del problema (1.4), a la derecha de la primera coma. Por lo tanto, la solución buscada es una función u de dos variables, continua en el rectángulo $R = [0,1] \times [0,+\infty) = \left\{ (x,t) \in \Re^2 : 0 \leq x \leq 1 \, , t \geq 0 \right\}$ y de clase C^2 en el rectángulo abierto $\overset{\circ}{R} = (0,1) \times (0,+\infty) = \left\{ (x,t) \in \Re^2 : 0 < x < 1 \, , t > 0 \right\}$, que sea solución de la ecuación diferencial (*i*), y que además satisfaga las condiciones iniciales (*ii*) y las de contorno (*iii*). Los datos del problema son: u_0 («posición inicial») y u_1 («velocidad inicial»). Para facilitar la resolución que sigue, vamos a suponer que la función *u* está definida y es de clase C^2 en todo $\Re^2$; consistentemente, supondremos que las funciones u_0 y u_1 están definidas y son de clase C^2 y C^1, respectivamente, en toda la recta real. Más precisamente, vamos a considerar <u>extensiones</u> $\widetilde{u}_0 : \Re \longrightarrow \Re$ y $\widetilde{u}_1 : \Re \longrightarrow \Re$ de estas funciones, lo que significa que para todo $x \in [0,1]$: $\widetilde{u}_0(x) = u_0(x)$ y $\widetilde{u}_1(x) = u_1(x)$. Hemos mencionado que la solución general de la ecuación (*i*) es de la forma $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$, donde $f : \Re \longrightarrow \Re$ y $g : \Re \longrightarrow \Re$ son dos funciones cualesquiera de clase C^2 en toda la recta. (Ver Nota 1, página 3). Las condiciones iniciales (*ii*) ahora son

$$\begin{cases} (a) f(x) + g(x) = \widetilde{u}_0(x) \\ (b) f'(x) - g'(x) = \widetilde{u}_1(x) \end{cases} \tag{1.5}$$

Sea $v(x)$ una primitiva de $\widetilde{u}_1(x)$. Entonces, (1.5) es equivalente a

$$\begin{cases} (a) f(x) + g(x) = \widetilde{u}_0(x) \\ (c) f(x) - g(x) = v(x) + cte \end{cases} \tag{1.6}$$

Sumando (a) y (c) obtenemos $f(x) = \frac{1}{2}[\widetilde{u}_0(x) + v(x) + cte]$, y restando las mismas, $g(x)$ $= \frac{1}{2}[\widetilde{u}_0(x) - v(x) - cte]$. Por lo tanto, nos queda

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) = \frac{1}{2}[\widetilde{u}_0(x+t) + v(x+t) + cte + \widetilde{u}_0(x-t) - v(x-t) - cte] =$$

$$= \frac{1}{2}[\widetilde{u}_0(x+t) + \widetilde{u}_0(x-t)] + \frac{1}{2}[v(x+t) - v(x-t)] \tag{1.7}$$

Hemos obtenido una función definida y de clase C^2 en todo el plano que satisface la ecuación (i) (para todo $(x,t) \in \Re^2$) y las condiciones iniciales (ii) para todo $x \in \Re$. Esto puede verificarse muy fácilmente. Ahora nos faltan las condiciones de contorno (iii). Parecería que ya no tenemos mucho margen para imponerle condiciones a la función u. Pero la clave está en que hay infinitas maneras de extender las funciones u_0 y u_1 del intervalo [0,1] a toda la recta. Veamos:

$$u(0,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{u}_0(t) + \widetilde{u}_0(-t)] + \frac{1}{2}[v(t) - v(-t)]$$
$$u(1,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{u}_0(1+t) + \widetilde{u}_0(1-t)] + \frac{1}{2}[v(1+t) - v(1-t)]$$

Si $\widetilde{u}_0$ es una función impar y v una función par, se tiene automáticamente que $u(0,t) = 0$ para todo t. Ahora, si $\widetilde{u}_0$ y v son, además, periódicas de período 1, también se verifica la condición $u(1,t) = 0$ para todo t, pues $\widetilde{u}_0(1+t) + \widetilde{u}_0(1-t) \overset{\text{período 1}}{=} \widetilde{u}_0(t) + \widetilde{u}_0(-1) \overset{\text{impar}}{=} 0$, y análogamente con v. Por lo tanto, la solución del problema (1.4) es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{u}_0(x+t) + \widetilde{u}_0(x-t)] + \frac{1}{2}[v(x+t) - v(x-t)] \tag{1.8}$$

donde: $\widetilde{u}_0 : \Re \longrightarrow \Re$ es la extensión 1-periódica impar de la condición inicial $u_0 : [0,1] \longrightarrow \Re$ y $v : \Re \longrightarrow \Re$ es la extensión 1-periódica par de una primitiva de la segunda condición inicial $u_1 : [0,1] \longrightarrow \Re$. Tal vez usted se sienta decepcionado, con «sabor a poco», pues aparecieron extensiones periódicas de manera algo extravagante. Pero si asocia este problema con una cuerda vibrante, no debería llamarle tanto la atención. Bajo ciertas condiciones de peso y elasticidad, el problema (1.4) es el modelo para una cuerda vibrante en el siguiente sentido: para cada instante $t \geq 0$, la función $\gamma_t : [0,1] \longrightarrow \Re^2$ tal que $\gamma_t(x) = (x, u(x,t))$ parametriza una curva que representa la posición de una cuerda de longitud 1, con extremos fijos (por las condiciones de contorno) en los puntos $(0, u(0,t)) \overset{(iii)}{=} (0,0)$ y $(1, u(1,t)) \overset{(iii)}{=} (1,0)$. Puede encontrar más detalles sobre el significado físico de este problema en la vasta literatura existente. Aquí me voy a limitar a dar un ejemplo bastante simple: la solución del problema

$$\begin{cases} (i) \quad \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad , 0 < x < 1 \,, t > 0 \\ (ii) \begin{cases} u(x,0) = sen(\pi x) \quad , \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{1}{2} sen(4\pi x) \;, \quad 0 < x < 1 \end{cases} \\ (iii) \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , t \geq 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

es la hermosa función

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[sen(\pi(x+t)) + sen(\pi(x-t))] + \frac{1}{16\pi}[-\cos(4\pi(x+t)) + \cos(4\pi(x-t))]$$

Cuando veamos Series de Fourier y su aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales, veremos cómo estas series permiten dar una expresión analítica de las extensiones periódicas de funciones no tan bonitas como las de este ejemplo.

§2. RECINTOS COMPACTOS

En todos los problemas que vamos a presentar, la expresión « recinto compacto en $\Re^n$ » significa un subconjunto cerrado y acotado $K \subset \Re^n$, que es la unión de un abierto no vacío $\overset{\circ}{K}$ (su interior) con su frontera $Fr(K)$, que supondremos «suave a trozos» e indicaremos ∂K, notación que se utiliza para el *borde* del conjunto *K*.

***Nota* 2.1**: El *borde* del disco $D = \{ (x,y,z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \,, z = 0 \}$ es la circunferencia $\{ (x,y,z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 = 1 \,, z = 0 \}$, mientras que la *frontera* de *D* en $\Re^3$ es todo el disco: $Fr(D) = D$. Obsérvese que en este caso, el interior de *D* es vacío. Otro ejemplo que puede aclarar la diferencia entre borde y frontera: el conjunto *Q* de los puntos del cuadrado $\{ (x,y) \in \Re^2 : 0 \leq x \leq 1 \,, 0 \leq y \leq 1 \}$ cuyas coordenadas son racionales, es decir: $Q = \{ (x,y) \in \Re^2 : 0 \leq x \leq 1 \,, x \in \mathcal{Q}, 0 \leq y \leq 1 \,, y \in \mathcal{Q} \}$, no tiene borde. Pero su frontera, en $\Re^2$, es todo el conjunto *Q*.

Un ejemplo típico de recinto compacto en $\Re^3$ es el tronco de cilindro

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \, , -1 \leq z \leq 1 \right\},$$

cuyo interior es $\overset{\circ}{K} = \left\{ (x,y,z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \, , -1 \leq z \leq 1 \right\}$ y su frontera es la superficie «suave a trozos»

$$\begin{aligned} \partial K = & \left\{ (x,y,z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \, , \, z = -1 \right\} \cup \left\{ (x,y,z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \, , \, z = \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x,y,z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 = 1 \, , -1 \leq z \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

La propiedad fundamental de estos recintos y por la cual nos interesan es que para estos recintos es válido el teorema de la divergencia:

$$\iint_{\partial K} \vec{f} . \breve{\eta}_{ext} \, d\sigma = \iiint_K div(\vec{f}) dxdydz$$

(para todo campo vectorial $\vec{f} : D \longrightarrow \Re^3$ de clase C^1 en un algún abierto $D \subset \Re^3$ que contenga al recinto K) .

En $\Re^2$, un ejemplo típico y clásico es el disco cerrado $K = \left\{ (x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, con interior $\overset{\circ}{K} = \left\{ (x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}$ y borde $\partial K = \left\{ (x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$. En el caso del plano, nuestro interés por estos recintos es la posibilidad de utilizar el teorema de Green:

$$\oint_{\partial K} Pdx + Qdy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \ ,$$

válido para todo campo vectorial $\vec{f} = (P,Q) : D \longrightarrow \Re^2$ de clase C^1 en un algún abierto $D \subset \Re^2$ que contenga al recinto K; ya hemos repasado este teorema y todos los requisitos previo necesarios - incluyendo orientaciones - en el Capítulo IX de los Apuntes de Análisis de Variable Compleja.

Faltaría un ejemplo en $\Re^1 = \Re$. Aquí hay menos variedad. Si pensamos, por ejemplo, solamente en los recintos compactos y conexos en la recta, nos quedamos solamente con los intervalos cerrados y acotados $K = [a,b] = \left\{ x \in \Re : a \leq x \leq b \right\}$. Claramente el interior de $K = [a,b]$ es $K = (a,b)$ y su borde es $\partial K = \left\{ a,b \right\}$, un par de puntos. El teorema integral que corresponde a esta dimensión es el que conocemos desde salita naranja:

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx ,$$

válido para cualquier función $f: I \longrightarrow \Re$ de clase C^1 en un intervalo abierto I que contenga al cerrado $K=[a,b]$.

Los ejemplos que hemos dado son francamente prolijitos. En particular, los hemos elegido simplemente conexos, lo que no es realmente necesario para la aplicación de los teoremas mencionados. Además, nos hemos quedado en dimensiones chicas: en $\Re$, $\Re^2$ y $\Re^3$. Hay dos razones para esto: la primera es que los problemas que aprenderemos a resolver en esta mini-introducción al tema, los vamos a plantear en esas dimensiones espaciales. La segunda es que en ningún curso de grado de esta Facultad de Ingeniería se enseñan los teoremas integrales en dimensiones mayores, y no pienso hacerlo yo en este apunte. Solamente voy a mencionar que estos teoremas existen y se resumen todos (incluyendo el de Green y el de la divergencia) en un solo teorema que se conoce como el *Teorema de Stokes Generalizado* y que tiene aproximadamente un siglo de existencia. De todos modos, en la presentación general de los problemas vamos a referirnos a un « recinto compacto en $\Re^n$ », lo que no debe asustar a nadie, pues no vamos a utilizar en ningún momento teoremas extravagantes y el alumno puede quedarse tranquilo que los ejemplos y ejercicios se van a quedar en las dimensiones «chicas».

§3) ECUACIÓN DE LAPLACE - PROBLEMA DE DIRICHLET.

Para cada entero positivo n y cada recinto compacto $K \subset \Re^n$, sea $C^2(K,\Re)$ el espacio de las funciones $u: K \longrightarrow \Re$ de clase C^2 en $\overset{\circ}{K}$ y continuas en K (más adelante incorporaremos funciones que tengan algún tipo de discontinuidad en ∂K). Se trata de un espacio vectorial real de dimensión infinita. Ahora, consideremos el espacio $C^0(\overset{\circ}{K},\Re)$ de las funciones continuas $\overset{\circ}{K} \longrightarrow \Re$, otro espacio vectorial real de dimensión infinita. La transformación lineal $\Delta : C^2(K,\Re) \longrightarrow C^0(\overset{\circ}{K},\Re)$ tal que para cada función $u \in C^2(K,\Re)$ y cada punto $x=(x_1,x_2,...,x_n) \in \overset{\circ}{K}$: $\Delta u(x)=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i{}^2}(x)$.
Esta transformación lineal se denomina «operador de Laplace» o «laplaciano». La

ecuación de Laplace es la que satisfacen las funciones del núcleo de este operador, es decir:

$$\boxed{\Delta u = 0} \tag{3.1}$$

Probablemente esta ecuación es la más importante en la historia de la humanidad. Sus soluciones se denominan *funciones armónicas* y el estudio de estas funciones es lo que se llama *teoría del potencial*. Las funciones armónicas son protagonistas estelares en varias ramas de la física: gravitación, mecánica de fluidos, electrostática, difusión del calor (veremos aquí que la ecuación de difusión del calor en estado estacionario es exactamente la ecuación de Laplace). En el siglo XX, la Relatividad General estimuló el estudio de ciertas generalizaciones del operador laplaciano a espacios más generales, y las correspondientes funciones armónicas han sido extensamente estudiadas desde el punto de vista de la matemática pura, pues tienen propiedades geométricas sorprendentes.

Se recomienda fuertemente informarse sobre la vida y obra de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Sobre los trabajos de este físico-matemático (y algunos contemporáneos), solamente voy a mencionar que en 1796 publicó un libro donde expone sus cálculos precisos del tamaño y densidad de un cuerpo gravitatorio en cuya superficie la velocidad de escape es la velocidad de la luz, es decir: un agujero negro…

La versión no homogénea de la ecuación (3.1), es decir: $\Delta u = f$, donde f es una «función conocida», se denomina ecuación de Poisson, que no estudiaremos aquí.

Comentario: Se mantiene la terminología «ecuación homogénea» y «ecuación no homogénea» que conocimos en Álgebra I y II, en referencia a sistemas de ecuaciones lineales. En general, las ecuaciones homogéneas son las que admiten al objeto nulo (número, vector o función) como solución.

Vemos un poco lo que nos cuenta la ecuación de Laplace sobre los campos vectoriales. Sabemos, desde nuestro paso por Análisis II - y lo hemos repasado en el Capítulo IX de los Apuntes de Análisis de Variable Compleja) - que un campo vectorial $\vec{f}: D \longrightarrow \Re^n$ de clase C^1 en un abierto $D \subseteq \Re^n$ es conservativo si y solamente si existe una función $u: D \longrightarrow \Re$ de clase C^2 tal que $\vec{f} = \vec{\nabla} u$ en el dominio *D*. Si existe una tal función *u*, como también sabemos, se denomina potencial de $\vec{f}$ (más precisamente, potencial escalar) y un campo conservativo tiene infinitos potenciales (si *D* es conexo, dos potenciales del mismo campo difieren en una constante aditiva). Ahora, la propiedad de conservatividad de un campo es una de las más importantes para su estudio desde el punto de vista físico. Otra propiedad clave es si es solenoidal o no, es decir: si su divergencia es nula o no. Ahora bien, si $\vec{f} = \vec{\nabla} u$, su divergencia es $div\vec{f} = \Delta u$ (es una cuentita muy sencilla). Por lo tanto, las funciones armónicas son los potenciales de los campos conservativos solenoidales. Tal vez esto pueda comenzar a dar una idea de la importancia de la ecuación de Laplace.

Sobre la «solución general» de la ecuación de Laplace en dos variables, tenemos toda la información necesaria gracias a nuestro paso por el análisis de variable compleja, información que resumimos en la siguiente proposición. La conclusión es que en la proveeduría de las funciones holomorfas podemos encontrar prácticamente todas las funciones armónicas de dos variables.

***Proposición* 3.1**:

(*i*) Para toda función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$, sus componentes real e imaginaria son funciones armónicas en *D*.

(*ii*) Dada una función armónica $u : D \longrightarrow \Re$ en un abierto simplemente conexo $D \subseteq \Re^2$, existe una función holomorfa $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ cuya parte real es *u*.

Prueba: (*i*) es consecuencia inmediata de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, de la analiticidad de las holomorfas (lo que implica que las componentes real e imaginaria de *f* son de clase C^∞) y de la igualdad de las derivadas segundas cruzadas de las funciones de clase C^2. Brevemente: si *u* y *v* son las componentes real e imaginaria de *f*, entonces

$$Cauchy-Riemann\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(análogamente para *v*). Para probar (*ii*), recordemos primero que las funciones armónicas son, por definición, de clase C^2. Utilizaremos lo que sabemos de campos conservativos en el plano, que hemos estudiado en Análisis II y repasado en el Capítulo IX de los Apuntes de Análisis de Variable Compleja. Consideremos el campo vectorial $\vec{w} = (P,Q) : D \longrightarrow \Re^2$ de clase C^1 cuyas componentes escalares son $P = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y $Q = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Por ser *u* armónica, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Puesto que esto vale en todo los puntos del dominio simplemente conexo *D*, resulta que el campo $\vec{w}$ es conservativo y por lo tanto admite potencial $v : D \longrightarrow \Re$, es decir, $\vec{w} = \nabla v : \dfrac{\partial v}{\partial x} = P = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = Q = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Por ser $\vec{w}$ de clase C^1, v es de clase C^2. Por lo tanto, la función $f = u + iv : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene componentes real e imaginaria diferenciables que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Pero esto significa, precisamente, que f es holomorfa en D. ■

***Nota* 3.1**:

(a) El ítem (ii) tiene una consecuencia impresionante, pues resulta que <u>toda función armónica de dos variables es de clase</u> C^∞ (más aún: analítica, como función real de dos variables reales). Para esta conclusión, la condición dada en el enunciado (ii) de que el dominio D sea simplemente conexo no es una restricción: dada una armónica m $u : D \longrightarrow \Re$ en un abierto cualquiera $D \subseteq \mathbb{C}$, para cada punto $(x_0, y_0) \in D$ existe un disco $D((x_0, y_0); r) \subseteq D$; el disco es simplemente conexo y por lo demostrado en (ii) existe entonces una función *f*, holomorfa en $D((x_0, y_0); r)$ cuya parte real es u. Pero las funciones holomorfas son analíticas, lo que implica inmediatamente que u es analítica (y por lo tanto C^∞) en $D((x_0, y_0); r)$. Pero si u es C^∞ en torno de cada punto de su dominio D, es C^∞ en D.

(b) Dos armónicas u y v que son la parte real e imaginaria de una misma función holomorfa se llaman *armónicas conjuga*das. Por lo tanto, las armónicas conjugadas están relacionadas por las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto, a su vez, significa que sus gradientes $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$, $\nabla v = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$ son ortogonales en cada punto de su dominio. Ahora, sea (x_0, y_0) un punto del dominio donde estos gradientes no se anulan. Sabemos que $\nabla v(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel (= línea equipotencial) de v que pasa por dicho punto, es decir: $\nabla v(x_0, y_0)$ es perpendicular a cualquier vector $\vec{T}$ que sea tangente a esa curva en el punto (x_0, y_0). Pero $\nabla u(x_0, y_0)$ es, a su vez, perpendicular a $\nabla v(x_0, y_0)$. En el plano, esto implica que $\nabla u(x_0, y_0)$ es paralelo a tangente a $\vec{T}$, es decir: $\nabla u(x_0, y_0)$ es tangente a la curva de nivel de v que pasa por (x_0, y_0). Puesto que (x_0, y_0) es un punto cualquiera del dominio donde los gradientes de u y de v no se anulan, la conclusión es que: <u>las curvas de nivel de v son las líneas de campo de</u> ∇u. Un razonamiento totalmente similar permite deducir, análogamente, que <u>las curvas de nivel de u son las líneas de campo de</u> ∇v. Todo esto significa, además, que las curvas de nivel de u y las curvas de nivel de v son «trayectorias ortogonales», es decir: en cada punto (x_0, y_0) donde los gradientes de u y de v no se anulan, la curva de nivel de u que pasa por (x_0, y_0) y la curva de nivel de v que pasa por (x_0, y_0) se cortan en ángulo recto. Puede usted mismo ilustrar esto con ejemplos sencillitos y clásicos. Tal vez el más popular sea $f(x+iy)=(x+iy)^2=\overbrace{x^2-y^2}^{u(x,y)}+i\overbrace{2xy}^{v(x,y)}$. En este caso, las familias de curvas de nivel de u y de v son dos familias de hipérbolas equiláteras muy sencillas de visualizar. Si hace un gráfico de este par de familias de trayectorias ortogonales, observe lo que pasa en el origen, donde se anulan los gradientes de u y de v.

El problema de contorno asociado a la ecuación de Laplace lleva el apellido del matemático Peter Gustave Lejeune Dirichlet (1805 - 1859).

Problema de Dirichlet (para un recinto compacto K de $\Re^n$)

$$\begin{cases}(i)\ \ \Delta u(x)=0 \quad , \quad x\in \overset{\circ}{K} \\ (ii)\ u(x)=\varphi(x)\,, \quad x\in\partial K\end{cases} \tag{3.2}$$

El dato, en este problema, es la función $\varphi:\partial K \longrightarrow \Re$, que se supone continua en el borde ∂K del recinto K. En algunos casos que aparecen en la práctica, la función φ puede tener algunas discontinuidades no muy «desprolijas», lo que será precisado en su momento.

Este problema satisface la condición de unicidad, y esta propiedad es consecuencia inmediata de una propiedad muy importante de las funciones armónicas (de una, dos o más variables).

Teorema* 3.1** (Principio del máximo para armónicas***)

Sea $K\subset\mathbb{R}^n$ un recinto compacto y sea $u:K\to\mathbb{R}$ una función continua en K y armónica en $\overset{\circ}{K}$. Entonces, u alcanza su máximo en el borde ∂K, es decir:

$$\max\{u(x):x\in K\} \;=\; \max\{u(x):x\in\partial K\} \tag{3.3}$$

Demostración: Elemental (= no requiere métodos sofisticados) pero no trivial. Ver Apéndice 1. ■

***Observación* 3.1**: K es compacto (es decir: cerrado y acotado) por hipótesis. ∂K es acotado (por estar contenido en K) y cerrado, por ser el complemento en K del abierto $\overset{\circ}{K}$. Entonces, por ser u continua, los máximos involucrados en (3.3) existen, efectivamente. Lo mismo ocurre con los mínimos de u en K y en su borde, que aparecerán en el corolario siguiente.

***Nota* 3.2**: En el caso de armónicas de dos variables, se podría haber presentado este principio en los apuntes de análisis de variable compleja, en relación con el *principio del módulo máximo*. Pero el principio del máximo para armónicas es una propiedad de las armónicas en general, no solamente de las armónicas en dos variables, y es por eso que lo ubicamos en este apunte.

***Corolario* 3.1**: Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un recinto compacto y sea $u : K \to \mathbb{R}$ una función continua en K y armónica en $\overset{\circ}{K}$. Entonces, *u* alcanza su mínimo en el borde ∂K, es decir:

$$\min\{u(x) : x \in K\} = \min\{u(x) : x \in \partial K\} \qquad (3.4)$$

Demostración: Basta con aplicar el teorema a la función -*u*. ■

Corolario* 3.2*: Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un recinto compacto y sea $u : K \to \mathbb{R}$ una función continua en K y armónica en $\overset{\circ}{K}$ tal que $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial K$. Entonces, *u* es nula en todo *K*. Es decir: el problema

$$\begin{cases} (i)\ \Delta u(x) = 0 & , \quad x \in \overset{\circ}{K} \\ (ii)\ u(x) = 0 & , \quad x \in \partial K \end{cases}$$

tiene solución única (la función nula)

Demostración: por hipótesis, $\min\{u(x) : x \in \partial K\} = \max\{u(x) : x \in \partial K\} = 0$. Entonces, por el Teorema y el Corolario previos, $\min\{u(x) : x \in K\} = \max\{u(x) : x \in K\} = 0$, es decir: el máximo y el mínimo de *u* en K es 0. ■

Corolario* 3.3 (*Teorema de Unicidad para el Problema de Dirichlet en $\Re^n$). Dado un recinto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ sean *u* y *v* dos soluciones del problema de Dirichlet (3.2). Entonces, $\forall x \in K : u(x) = v(x)$.

Demostración: La función *w* = *v* - *u* es continua en *K*, armónica en $\overset{\circ}{K}$ y se anula en el borde ∂K. Por el corolario anterior, *w* es nula en *K*. ■

Como hemos mencionado previamente, se puede «aflojar» un poco (no mucho) la condición de continuidad en el borde. Se puede aprovechar la breve demostración del corolario anterior para observar lo siguiente: por hipótesis, $\forall x \in \partial K$ tenemos que $u(x) = v(x) = \varphi(x)$. Por lo tanto, aunque φ tenga alguna discontinuidad en algún punto del borde, la diferencia *v* - *u* sigue siendo nula en el borde. Por otra parte, se necesita que existan el máximo y el mínimo de v - u para poder utilizar el teorema y sus corolarios. En el apéndice 1 puede verse un contraejemplo y el enunciado más preciso de este «afloje» para el caso de un disco y la correspondiente prueba de unicidad, que es bastante trabajosa. De todos modos, lo que queda por resolver ahora es el tema de la existencia de la solución. Más adelante, en otro apunte, desarrollaremos algunos métodos para encontrar la solución del problema de Dirichlet en recintos no muy complicados del plano. Mientras tanto, cerramos el parágrafo con una observación y un momento cultural. En el Apéndice 2 se expone - con ejemplos - el «método de la transformación conforme» para la resolución del problema de Dirichlet en el plano cuando las condiciones de contorno son seccionalmente constantes. La fundamentación teórica de ese método está dada, precisamente, por el siguiente momento cultural.

***Observación* 3.2**: Para recintos no acotados la unicidad no se verifica. Un ejemplo sencillo: el borde del dominio $D=\left\{(x,y)\in\Re^2 : y\geq 0\right\}$ es $\partial D=\left\{(x,y)\in\Re^2 : y=0\right\}$ y su interior es $\overset{\circ}{D}=\left\{(x,y)\in\Re^2 : y>0\right\}$. Las tres funciones $u(x,y)=y$, $v(x,y)=e^x sen(y)$ y $w(x,y)=xy$ son armónicas (en todo el plano) y se anulan en el borde de *D*.

Momento cultural: *Fórmula de Poisson para el disco y Teorema de la Representación conforme de Riemann.*

Indiquemos, para simplificar, $\overline{D}=\left\{(x,y)\in\Re^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}$. El interior es obviamente el disco abierto $\overset{\circ}{\overline{D}}=D=\left\{(x,y)\in\Re^2 : x^2+y^2<1\right\}$ y el borde es la circunferencia $\partial D=\left\{(x,y)\in\Re^2 : x^2+y^2=1\right\}$ (D y $\overline{D}$ tienen el mismo borde). Se puede demostrar por distintos métodos (nosotros lo haremos utilizando series de Fourier) que la función $u:\overline{D}\longrightarrow\Re$ definida por

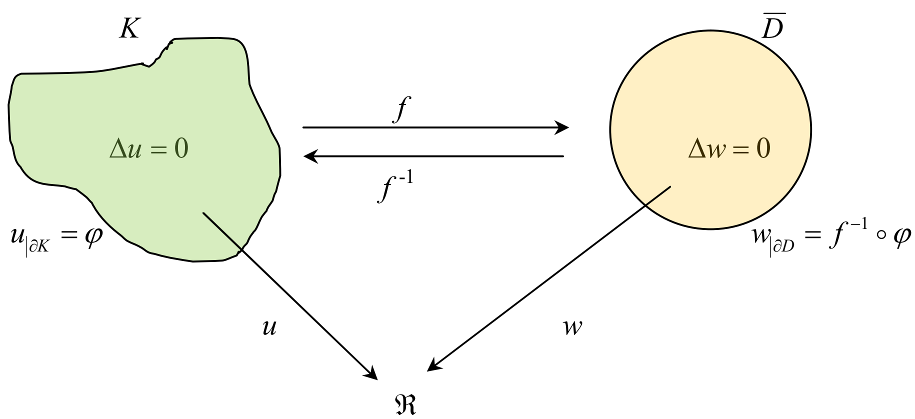
$$u(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-(x^2+y^2)}{1-2[x\cos(t)+y sen(t)]+x^2+y^2}\varphi(\cos(t),sen(t))dt & si \quad x^2+y^2<1\\ \varphi(x,y) & si \quad x^2+y^2=1\end{cases} \tag{3.5}$$

es continua en $\overline{D}$ y armónica en $\overset{\circ}{D}$. Además, obviamente $u=\varphi$ en ∂D. Es decir, la función (3.5) resuelve el problema de Dirichlet en el disco. La fórmula integral que define a esta función en el interior del disco es una de las tantas que se conocen como «fórmulas de Poisson» [Siméon Denis Poisson (1781 - 1840)]. Por lo menos para el disco del plano, ya tenemos probada la existencia de solución en el problema de Dirichlet. Pero ahora viene un teorema que liquida el problema en casi cualquier recinto del plano. Hay distintos enunciados de este teorema. Nosotros lo enunciaremos en la forma que nos interesa, y que utiliza resultados posteriores al original de Riemann (por ejemplo, un teorema de Carathéodory sobre la extensión de la representación conforme a la frontera del recinto).

Teorema de la Representación Conforme de Riemann:

Sea $C \subset \mathbb{C}$ una curva cerrada simple, regular a trozos, y sea $K = C \cup RI(C)$ el recinto compacto del plano cuyo borde es C y cuyo interior es el abierto simplemente conexo $RI(C)$. Entonces, existe una función biyectiva y continua $f : K \longrightarrow \overline{D}$ y holomorfa en $\overset{\circ}{K} = RI(C)$, que transforma este abierto $\overset{\circ}{K} = RI(C)$ en el disco abierto D, y el borde $\partial K = C$ en la circunferencia ∂D. Además, la inversa $f^{-1} : \overline{D} \longrightarrow K$ es holomorfa en D y transforma este disco abierto en $\overset{\circ}{K} = RI(C)$ y el borde ∂D en el borde $\partial K = C$. ■

Es un teorema asombroso y su demostración excede largamente el alcance de este apunte. Recomiendo leer la formulación original de Riemann, que es mucho más sencilla y más sorprendente aún. Lo que sí haremos es mostrar cómo este teorema resuelve el Problema de Dirichlet para cualquier recinto como el del enunciado del teorema, recinto que denominaremos, para simplificar: «recinto compacto simplemente conexo», sobreentendiendo el resto.



Planteemos entonces el problema de Dirichlet en un recinto compacto simplemente conexo K. El dato, además del recinto, es la función continua $\varphi : \partial K \longrightarrow \partial D$. Sea $f : K \longrightarrow \overline{D}$ una de las funciones garantizadas por el Teorema de Representación Conforme. Con esta función trasladamos el problema de Dirichlet al disco $\overline{D}$ de la siguiente manera: si la función $w : \overline{D} \longrightarrow \Re$ es continua en $\overline{D}$ y armónica en el abierto D, entonces $u = w \circ f : K \longrightarrow \Re$ es continua en K y armónica en $\overset{\circ}{K}$.

Observación* 3.3*: Estamos cometiendo un abuso de notación bastante inocente: la función *w* depende de dos variables reales, por lo tanto no se podría componer con la función *f*, que toma valores complejos. Aclaremos el tema para los puristas: si indicamos con α y β las componentes real e imaginaria, respectivamente, de *f*, es decir: $f(x,y)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$, entonces $u=w\circ f$ significa que para cada $(x,y)\in K$ es $u(x,y)=w(\alpha(x,y),\beta(x,y))$. La inocencia que declaramos es la misma que identifica un complejo $x+iy$ con el par ordenado (x, y), identificación que no constituye un delito.

La continuidad de *u* es inmediata, pues es una composición de continuas. Veamos por qué resulta armónica en $\overset{\circ}{K}$: por ser *w* armónica en el simplemente conexo *D*, admite una conjugada armónica y por lo tanto existe una función holomorfa $h:D\longrightarrow\mathbb{C}$ cuya parte real es *w*. Ahora, la función $h\circ f:\overset{\circ}{K}\longrightarrow\mathbb{C}$ es holomorfa, por ser composición de holomorfas. Por lo tanto, su parte real $\operatorname{Re}(h\circ f)=w\circ f=u$ es armónica en $\overset{\circ}{K}$. Finalmente tenemos la equivalencia

$$\begin{cases}(i)\ \Delta u=0 & en\quad \overset{\circ}{K}\\ (ii)\ u=\varphi & en\quad \partial K\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(i)\ \Delta w=0 & en\quad D\\ (ii)\ w=f^{-1}\circ\varphi & en\quad \partial D\end{cases}\tag{3.6}$$

Y la fórmula de Poisson nos da la solución *w* del segundo problema.

§4) ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DEL CALOR Y ECUACIÓN DE ONDAS

Parece llegado el momento de abreviar la exposición. Presentaremos estas ecuaciones en el contexto de los problemas de contorno y condiciones iniciales en las que se presentan en las aplicaciones físicas.

El problema de difusión del calor en un recinto compacto $K\subset\Re^n$ es:

$$\begin{cases}(i)\ \ \Delta u(x,t)-k\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0 & ,\quad x\in\overset{0}{K}\ ,\ t>0\\ (ii)\ u(x,t)=\varphi(x,t) & ,\quad x\in\partial K\ ,\ t\geq 0\\ (iii)\ u(x,0)=u_0(x) & ,\quad x\in K\end{cases}\tag{4.1}$$

y el problema asociado a la ecuación de ondas es:

$$\begin{cases} (i)\ \ \Delta u(x,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad x \in \overset{0}{K}\ , t > 0 \\ (ii)\ u(x,t) = \varphi(x,t) \qquad\qquad\qquad , \quad x \in \partial K\ , t \geq 0 \\ (iii) \begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \end{cases} \qquad\quad , \quad x \in K \end{cases} \tag{4.2}$$

En ambos casos, el laplaciano opera solamente sobre las variables espaciales, no sobre *t*, es decir:

$$\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} \tag{4.3}$$

En el problema (4.1), los datos son: la constante *k*, que es positiva, la función continua $\varphi : \partial K \times [0,+\infty) \longrightarrow \Re$ y la función, también continua, $u_0 : K \longrightarrow \Re$. La función incógnita *u* es la distribución, variable con el tiempo, de las temperaturas en cuerpo representado por *K*. Es decir: *u*(*x*, *t*) es la temperatura del punto de coordenadas $x \in K$ en el instante *t*. La ecuación (*i*) es la ecuación de difusión del calor en un cuerpo con determinadas características físicas de homogeneidad e isotropía y la constante *k* es un coeficiente de difusión, característico del cuerpo. En este contexto, es importante mencionar una variante del problema, en la que la condición de contorno es reemplazada por la aislación térmica del cuerpo:

$$\begin{cases} (i)\ \ \Delta u(x,t) - k\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \quad , \quad x \in \overset{0}{K}\ , t > 0 \\ (ii)\ \ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \breve{\eta}} = 0 \qquad\qquad\quad , \quad x \in \partial K\ , t \geq 0 \\ (iii)\ u(x,0) = u_0(x) \qquad\qquad , \quad x \in K \end{cases} \tag{4.1 bis}$$

donde $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \breve{\eta}}$ es la derivada direccional de *u* respecto del versor normal a ∂K en el punto $x \in \partial K$ en el instante *t*. La anulación de esta derivada direccional en todos los puntos del borde del cuerpo y en todo instante significa, precisamente, la ausencia de flujo de temperatura a través del borde.

Observe que las soluciones de la ecuación (*i*) (tanto del problema (4.1) como del (4.1 bis)) que no dependen de *t* son las funciones armónicas, que son entonces las soluciones del problema en el caso estacionario, es decir: cuando la distribución de temperaturas no depende del tiempo.

En el problema (4.2), los datos son: la constante c, que es positiva (se denomina «velocidad de propagación de la onda»), la función continua $\varphi : \partial K \times [0,+\infty) \longrightarrow \Re$ y las funciones, también continuas, $u_0 : K \longrightarrow \Re$ y $u_1 : K \longrightarrow \Re$. La función incógnita u se denomina «función de onda», pero el concepto de onda, en física, no es sencillo de entender.

Nosotros estudiaremos métodos para encontrar las soluciones de estos problemas en algunos casos de dimensiones pequeñas. El caso unidimensional del problema (4.2) es el problema de la cuerda vibrante y ya lo hemos tratado en la introducción (página 5). Mientras tanto, podemos ir afirmando que en estos problemas también tienen solución única. Las demostraciones pueden verse en el Apéndice 3.

Por último, en el Apéndice 4 puede verse una deducción extremadamente simplificada de la ecuación de difusión del calor en el caso tridimensional. Las ideas son muy sencillas y permiten entender cómo se puede deducir una ecuación diferencial en derivadas parciales a partir de un problema físico.

Antes de dar por finalizado este apunte, es necesario aclarar, una vez más, que se trata de una brevísima introducción a un tema inmenso. Hay ecuaciones y temas muy importantes de la teoría básica que ni se mencionaron. Algunos se presentarán en los próximos apuntes, como por ejemplo el método de separación de variables y el uso de las series de Fourier para resolver determinados problemas de contorno y condiciones iniciales. Otros, como las ecuaciones de primer orden, variedades características, funciones de Green, quedarán para un futuro remoto. De todos modos, repito una vez más, todo esto ya está escrito en excelentes libros que esperan ser leídos en los estantes de las bibliotecas universitarias de todo el planeta.

APÉNDICE 1: ***Sobre el Principio del Máximo para armónicas y una observación de la Dra. Bergamini.***

El contenido de este apéndice ya estaba escrito mucho antes de la pandemia del coronavirus, y fue motivado por una observación de mi colega Lorena Bergamini, sobre la cuestión de la unicidad en el problema de Dirichlet en el plano. Este es un buen momento y lugar para agradecerle a la Dra. Bergamini por sus observaciones, correcciones y sugerencias. No es un texto destinado a un apunte, sino a pasar en limpio un intercambio entre colegas. Pido disculpas de antemano por no volver a redactarlo, pero me lo impide la falta de tiempo. Por otra parte, no me parece mal que los alumnos asistan a estas disquisiciones.

La función $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$ es armónica en $\Re^2-\{(0,-1)\}$, pues se trata de la parte real de la homografía $z\mapsto\dfrac{z-i}{z+i}$. En particular, es armónica en el interior del disco $D=\left\{(x,y)\in\Re : x^2+y^2<1\right\}$ y es idénticamente nula en su borde, excepto en el punto (0,-1), y es claramente no nula. Por lo tanto, las condiciones de unicidad para el problema de Dirichlet en dominios acotados requieren mayor delicadeza que la que habitualmente se despliega frente a los alumnos.

Hay varias demostraciones de unicidad, la mayoría de las cuales requiere que la función armónica sea continua en el borde del disco: con mucho cuidado uno puede demostrar, por ejemplo, (fórmula de Poisson) que si $\varphi:\Re\to\Re$ es 2π - periódica y <u>continua</u>, entonces la función $u:\overline{D}\to\Re$ tal que

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-x^2-y^2}{1-2[x\cos(t)+ysen(t)]+x^2+y}\varphi(t)dt \quad , \text{ si } x^2+y^2<1$$

y en el borde del disco es

$$u(\cos(t),sen(t))=\varphi(t) \quad , \quad 0\le t\le 2\pi \, ,$$

es armónica en el interior de D y <u>continua</u> en su clausura. Es relativamente sencillo demostrar esto si uno utiliza la hipótesis mucho más fuerte de que u sea armónica en un abierto que contiene a $\overline{D}$. De todos modos, me parece más natural estudiar el tema de la unicidad utilizando el *principio del máximo* de las armónicas, que por otra parte se verifica en dimensiones mayores. El enunciado preciso es el siguiente:

TEOREMA: Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $\overline{D}$ es acotado (por lo tanto compacto) y sea $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ una función continua, de clase C^2 y armónica en *D*. Por ser *u* continua y por ser $\overline{D}$ y $Fr(\overline{D})$ compactos [1], existen los máximos $M = \max\{u(x) : x \in \overline{D}\}$ y m = $\max\{u(x) : x \in Fr(\overline{D})\}$. Entonces: $M = m$.

Observación [1]: $Fr(\overline{D})$ es acotada por estar contenida en $\overline{D}$ y es cerrada por ser el complemento del abierto *D* en el cerrado $\overline{D}$.

***Demostración*:** Dado que $Fr(\overline{D}) \subset \overline{D}$ se tiene trivialmente la desigualdad $m \le M$. Supongamos que $m < M$. Entonces, $M = u(x_0)$ para algún punto <u>interior</u> $x_0 \in D$. Consideremos la función $v : \overline{D} \to \mathbb{R}$ tal que

$$v(x) = u(x) + \frac{M-m}{2r^2}\|x - x_0\|^2 \qquad (*1)$$

donde $r = \max\left\{ \|y - x\| : (x, y) \in \overline{D} \times \overline{D} \right\}$ es el «diámetro» de $\overline{D}$ (aquí es donde interviene la hipótesis de compacidad de $\overline{D}$; la compacidad de $\overline{D} \times \overline{D}$ es consecuencia de esta hipótesis y del teorema de Tychonov). Entonces:

(a) $\forall x \in \overline{D} : v(x) \le u(x) + \dfrac{M-m}{2r^2} r^2 = u(x) + \dfrac{M-m}{2}$

(b) $\forall x \in Fr(\overline{D}) : v(x) \overset{(a)}{\le} u(x) + \dfrac{M-n}{2} \le m + \dfrac{M-m}{2} = \dfrac{M+m}{2}$

(c) $v(x_0) = u(x_0) = M$

De (*a*), (*b*) y (*b*) se deduce que

$$\max\{v(x) : x \in \overline{D}\} \ge M = \frac{M+M}{2} \overset{m<M}{>} \frac{M+m}{2} \overset{(b)}{\ge} \max\{v(x) : x \in Fr(\overline{D})\}$$

Por lo tanto, *v* alcanza su máximo en el interior del dominio, es decir, en algún punto $\breve{x}_0 \in D$ y entonces:

$$(i)\ \frac{\partial v}{\partial x_i}(\breve{x}_0) = 0 \qquad (ii)\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_i}(\breve{x}_0) \le 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

(Las condiciones (*ii*) se deducen del hecho de que las funciones $f_i(t) = v(\breve{x}_0 + te_i)$, definidas en algún entorno de $t = 0$ (tener presente que *D* es abierto), son de clase C^2 y tienen un máximo local en $t = 0$. Por lo tanto $f_i'(0) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(\breve{x}_0) = 0$; y si fuera $f_i''(0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_i}(\breve{x}_0) > 0$ para algún i, la función f_i tendría un mínimo en 0).

Ahora, de (*1):

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \frac{M-m}{2r^2}2(x_i - x_{0i}) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \frac{M-m}{r^2}(x_i - x_{0i})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x) + \frac{M-m}{r^2}$$

y se obtiene, finalmente, la contradicción $0 \overset{(ii)}{\geq} \Delta v(\breve{x}_0) = \Delta u(\breve{x}_0) + n\frac{M-m}{r^2} = n\frac{M-n}{r^2}$. ■

COROLARIO 1: Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $\overline{D}$ es acotado (por lo tanto compacto) y sea $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ una función continua, de clase C^2 y armónica en *D*. Por ser *u* continua y por ser $\overline{D}$ y $Fr(\overline{D})$ compactos, existen los mínimos $m' = \min\{u(x) : x \in \overline{D}\}$ y $M' = \min\{u(x) : x \in Fr(\overline{D})\}$. Entonces: $M' = m'$.

P/ Basta aplicar el teorema a la función $-u$. ■

COROLARIO 2: Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $\overline{D}$ es acotado (por lo tanto compacto) y sea $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ una función continua, de clase C^2 y armónica en *D* tal que $u_{|Fr(D)} = 0$. Entonces, *u* es idénticamente nula en $\overline{D}$.

P/ Se deduce del Teorema y del corolario 1, pues por hipótesis 0 es máximo y mínimo de *u* en $\overline{D}$ ■

COROLARIO 3: Unicidad del problema de Dirichlet para dominios compactos de $\mathbb{R}^n$.

(consecuencia inmediata del corolario 2)

Con este resultado se puede obtener lo que necesitamos:

TEOREMA DE LA MAYORANTE DISCONTINUA:

Sean $u:\overline{D}\to\Re$ y $v:\overline{D}\to\Re$ dos funciones en el disco $\overline{D}=\{(x,y)\in\Re^2 : x^2+y^2\le 1\}$ tales que:

(i) u y v son continuas en $\overline{D}-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$

(ii) u y v son <u>acotadas</u> en $\overline{D}-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$

(iii) u y v son de clase C^2 y armónicas en $D-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$

(iv) $u(x,y)\le v(x,y)$ para todo $(x,y)\in\partial\overline{D}-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$

Entonces: $u(x,y)\le v(x,y)$ para todo $(x,y)\in\overline{D}-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$

Observación: alguno o todos los puntos del conjunto $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$ puede estar en el interior o en la frontera de D.

P/ Por hipótesis (ii) existe $K\in\Re$ tal que $|u(x,y)-v(x,y)|\le K$ para todo (x,y) $\in\overline{D}-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$. Sea ε un número real tal que $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ y tal que los discos $\overline{D}((x_i,y_i),\varepsilon)$ son disjuntos dos a dos. Obsérvese que para cada real δ tal que $0<\delta<\varepsilon$, los discos $\overline{D}((x_i,y_i),\delta)$ también resultan disjuntos dos a dos; para cada uno de estos números, sea $D_\delta=D-\bigcup_{i=1}^{n}\overline{D}((x_i,y_i),\delta)$. Resulta que si $0<\delta<\delta'<\varepsilon$, entonces $D_\varepsilon\subset D_{\delta'}\subset D_\delta$. Ahora, para cada real δ tal que $0<\delta<\varepsilon$ la función

$$w_\delta(x,y)=u(x,y)-v(x,y)-\frac{K}{\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)}\overbrace{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\right)}^{h(x,y)} \qquad (*2)$$

es armónica en $D_\delta=D-\bigcup_{i=1}^{n}\overline{D}((x_i,y_i),\delta)$ y continua en su adherencia. Ahora, la idea es probar que $w_\delta(x,y)\le 0$ para todo $(x,y)\in\partial D_\delta$ para luego utilizar el principio del máximo y deducir que $w_\delta(x,y)\le 0$ para todo $(x,y)\in D_\delta$.

(a) Para todo $(x,y)\in\overline{D}_\delta : 0\le\ln\left(\frac{2}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)}}\right)\le\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)$, pues para todo $(x,y)\in\overline{D}_\delta : \delta\le\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\le 2$ (hacer dibujito), y por lo tanto

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \leq \frac{1}{\delta} \therefore 1 \leq \frac{2}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \leq \frac{2}{\delta} \therefore$$

$$\therefore 0 \leq \ln\left(\frac{2}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)}}\right) \leq \ln\left(\frac{2}{\delta}\right)$$

(b) Si $(x,y) \in \partial D_\delta$, entonces $(x,y) \in \partial D - \{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$ o (no exclusivo) bien $\sqrt{(x-x_{i_0})^2+(y-y_{i_0})^2} = \delta$ para algún $i_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$. En el primer caso, por hipótesis (*iv*) tenemos que $u(x,y) \leq v(x,y)$ y entonces, teniendo en cuenta (*a*):

$$w_\delta(x,y) = \overbrace{u(x,y)-v(x,y)}^{\leq 0} - \overbrace{K}^{\geq 0} \overbrace{\frac{1}{\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{2}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\right)}^{\geq 0} \leq 0$$

En el segundo caso, es decir: si $\sqrt{(x-x_{i_0})^2+(y-y_{i_0})^2} = \delta$ para algún $i_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$, resulta

$$w_\delta(x,y) = u(x,y)-v(x,y) - \frac{K}{\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)}\left(\ln\left(\frac{2}{\delta}\right) + \sum_{i_0 \neq i=1}^{n} \ln\left(\frac{2}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\right)\right) =$$

$$= \overbrace{u(x,y)-v(x,y)-K}^{\leq 0} - \overbrace{\frac{K}{\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)} \sum_{i_0 \neq i=1}^{n} \ln\left(\frac{2}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\right)}^{\geq 0} \leq 0$$

Hemos probado que $w_\delta(x,y) \leq 0$ para todo (*x*,*y*) en la frontera de D_δ (y para todo δ tal que $0 < \delta < \varepsilon$). Por el *principio del máximo* es $w_\delta(x,y) \leq 0$ para todo $(x,y) \in D_\delta$, es decir: para cada real δ tal que $0 < \delta < \varepsilon$ y para cada $(x,y) \in D_\delta$ se tiene que

$$w_\delta(x,y) = u(x,y)-v(x,y) - \frac{K}{\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)} h(x,y) \leq 0$$

Ahora, dado un punto $(x,y)\in D-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$ (este punto estará fijo en lo que sigue), existe al menos un real δ_0 tal que $0<\delta_0<\varepsilon$ y $(x,y)\in D_{\delta_0}$. Puesto que para todo

δ tal que $0<\delta<\delta_0$ es $D_{\delta_0}\subset D_{\delta}$, tenemos que para cada δ tal que $0<\delta<\delta_0$ se verifica $(x,y)\in D_{\delta_0}$ y entonces $u(x,y)-v(x,y)-\dfrac{K}{\ln\left(\dfrac{2}{\delta}\right)}h(x,y)\leq 0$. Dado que esto se verifica para todo δ tal que $0<\delta<\delta_0$ (y para este punto (x, y) fijo), tomando límite para $\delta\longrightarrow 0^+$ en la desigualdad precedente se obtiene $u(x,y)-v(x,y)\leq 0$.

Hemos probado la desigualdad $u(x,y)-v(x,y)\leq 0$ para todos los puntos del abierto $D-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$(La desigualdad para los puntos de la frontera es la hipótesis (*iv*)) ■

Corolario 4: Sea $u:\overline{D}\rightarrow\Re$ continua y acotada en $\overline{D}-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$, de clase C^2 y armónica en $D-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$ tal que se anula en todos los puntos de $\partial\overline{D}-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$. Entonces u es idénticamente nula en $\overline{D}-\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\}$.

P/ Basta considerar v = 0 en el teorema precedente para llegar a la conclusión de que u es ≤ 0 en su dominio. Aplicando este resultado a -u (o intercambiando los roles de u y v en el teorema) se tiene la tesis. ■

Corolario 5: Unicidad de armónicas acotadas y con condiciones seccionalmente continuas en el borde.

P/ Consecuencia inmediata de corolario anterior. ■

Observaciones finales: este último teorema es válido para dominios más generales, obviamente. Por otra parte, se puede utilizar para demostrar la unicidad de armónicas acotadas en recintos no acotados (transformables en el disco mediante una conforme: teorema de Riemann). Pero la conclusión que nos interesa en estos momentos es que la acotación de las armónicas es necesaria (aunque no suficiente)[1] para la unicidad del problema de Dirichlet en recintos acotados con condiciones seccionalmente continuas en el borde.

[1]: La función constantemente = 1 en el interior del disco y nula en el borde es un ejemplo de armónica acotada y no nula en el interior del disco (y nula en el borde). Es necesaria alguna restricción sobre el conjunto de puntos de discontinuidad, además de la acotación. Claramente, si el conjunto de puntos de discontinuidad es finito (además de la acotación), se verifica la unicidad, como quedó demostrado ut supra.

APÉNDICE 2: ***Método de la Transformación Conforme para la resolución del Problema de Dirichlet en el plano con condiciones de contorno seccionalmente constantes.***

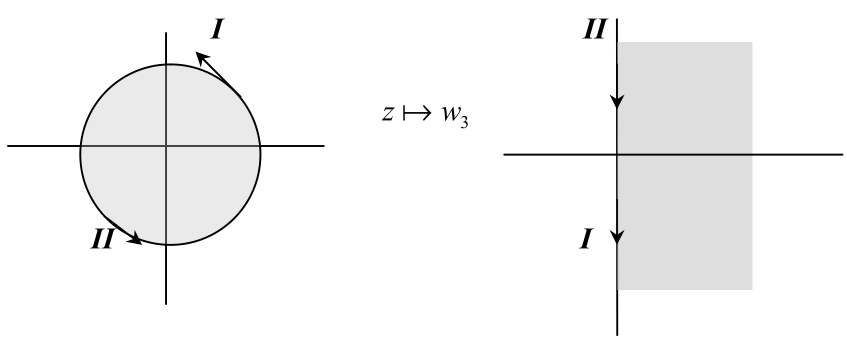
Presentamos este método mediante un par de ejercicios que se han tomado en exámenes de años anteriores. En las resoluciones queda claro el método utilizado. La fórmula de Poisson no es de utilidad práctica (al menos en estos casos). La unicidad de solución, cuando las condiciones de contorno tienen discontinuidades puntuales y acotadas ya la hemos estudiado bastante en el apéndice anterior. En la guía de trabajos prácticos del curso se pueden encontrar más ejercicios de este tipo.

EJERCICIO 1) Sea $D=\left\{z\in C:|z|<1\right\}$. Resolver:

$$\begin{cases}(i)\ \Delta u(x,y)=0 \quad , \quad (x,y)\in D \\ (ii)\ u(\cos(\theta),sen(\theta))=\begin{cases}1 & 0\le\theta\le\pi \\ -1 & \pi\le\theta\le 2\pi\end{cases}\end{cases}$$

(Dar explícitamente la solución en términos de sus variables reales)

RESOLUCIÓN: La secuencia de transformaciones conformes $z\mapsto w_1=z+1$, $w_1\mapsto w_2=\dfrac{1}{w_1}$, $w_2\mapsto w_3=w_2-\dfrac{1}{2}$ transforma el disco $D=\left\{z=x+y\,i\in C:|z|<1\right\}$ en el semiplano $H=\left\{x+y\,i\in C:x>0\right\}$, transformando la semicircunferencia superior en el semieje imaginario inferior y la semicircunferencia inferior en el semieje imaginario superior, como se indica en la figura:



Podemos elegir entonces $u=aArg(w_3)+b$, donde $Arg(w_3)=artg\left(\dfrac{im(w_3)}{re(w_3)}\right)$, pues $-\dfrac{\pi}{2}\le Arg(w_3)\le\dfrac{\pi}{2}$. (Esta es la ventaja de utilizar este semiplano). Ahora, las condiciones (*ii)* imponen $a\dfrac{\pi}{2}+b=-1$ y $-a\dfrac{\pi}{2}+b=1$, es decir: $a=-\dfrac{2}{\pi}$ y $b=0$.

Entonces, haciendo algunas cuentas se tiene $w_3 = \dfrac{1-(x^2+y^2)}{2[(x+1)^2+y^2]} - \dfrac{2y}{2[(x+1)^2+y^2]}i$,

resulta finalmente

$$u(x,y) = -\frac{2}{\pi} artg\left(\frac{-2y}{1-(x^2+y^2)}\right) = \frac{2}{\pi} artg\left(\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}\right)$$

Obsérvese que, efectivamente, cuando x^2+y^2 tiende a 1 por izquierda, u tiende a 1 si $y>0$ y a -1 si $y<0$.

EJERCICIO 2) Dado el dominio

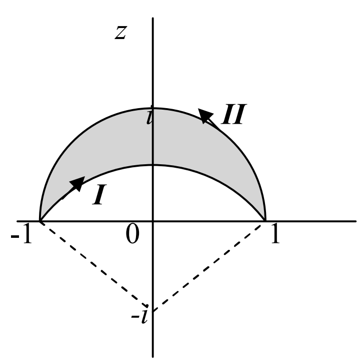
$$D = \{(x,y)\in\Re^2 : x^2+y^2 \le 1\} \cap \{(x,y)\in\Re^2 : x^2+(y+1)^2 \ge 2\},$$

resolver el problema de Dirichlet siguiente:

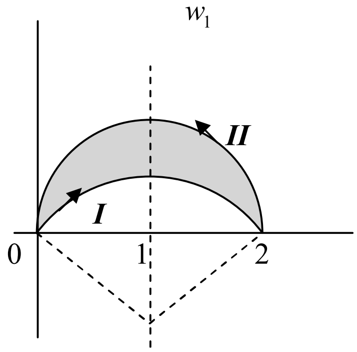
$$\begin{cases} (i)\ \Delta u(x,y) = 0 \quad , \quad (x,y)\in \overset{\circ}{D} \\ (ii)\ u(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ \ x^2+y^2 = 1 \wedge y>0 \\ -1 & si\ \ x^2+(y+1)^2 = 2 \ \wedge y>0 \end{cases} \end{cases}$$

(Expresar la solución en forma explícita en términos de las variables x e y)

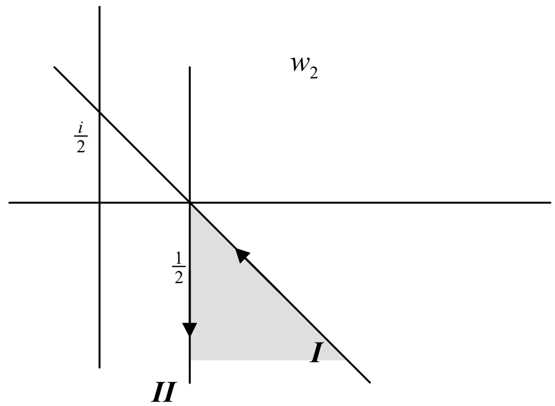
RESOLUCIÓN: Transformemos el dominio D en otro más sencillo para resolver el problema de Dirichlet. La transformación debe ser conforme y podemos construirla mediante la siguiente secuencia:



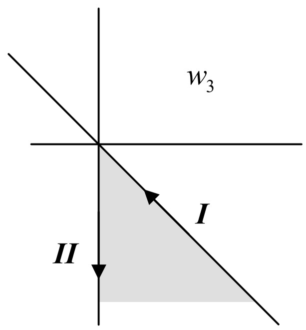
$z \mapsto w_1 = z+1$



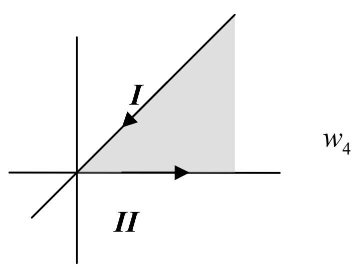
$$w_1 \mapsto w_2 = \frac{1}{w_1}$$



$$w_2 \mapsto w_3 = w_2 - \tfrac{1}{2}$$



$$w_3 \mapsto w_4 = iw_3$$



(Esta última transformación realmente no hacía falta). Obsérvese que la medida $\frac{\pi}{4}$ del ángulo formado por los lados *I* y *II* en el punto (1,0) de la primera figura, se mantiene invariante en las sucesivas transformaciones. Finalmente, la transformación final es, con la notación habitual $z = x + yi$:

$$f(z)=w_4=iw_3=i(w_2-\tfrac{1}{2})=i(\tfrac{1}{w_1}-\tfrac{1}{2})=i(\tfrac{1}{z+1}-\tfrac{1}{2})=\frac{\bar{z}+1}{|z+1|^2}i-\frac{i}{2}=\frac{x+1-iy}{(x+1)^2+y^2}i-\frac{i}{2}=$$

$$=\frac{y}{(x+1)^2+y^2}+\left[\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}-\frac{1}{2}\right]i=\frac{y}{(x+1)^2+y^2}+\frac{2x+2-x^2-2x-1-y^2}{2[(x+1)^2+y^2]}i=$$

$$=\frac{y}{(x+1)^2+y^2}+\frac{1-x^2-y^2}{2[(x+1)^2+y^2]}i$$

Entonces,

$$u(x,y)=1-\frac{8}{\pi}Arg(w_4)=1-\frac{8}{\pi}artg\left(\frac{1-x^2-y^2}{2y}\right)$$

es la solución buscada. Obsérvese que para $x^2+y^2=1$ es efectivamente $u(x, y) = 1$ y para $x^2+(y+1)^2=2$ e $y > 0$:

$$x^2+y^2+2y+1=2 \quad \therefore \quad 2y=1-x^2-y^2 \therefore \frac{1-x^2-y^2}{2y}=1 \therefore artg\left(\frac{1-x^2-y^2}{2y}\right)=\frac{\pi}{4}$$

y entonces $u(x,y)=1-\frac{8}{\pi}\frac{\pi}{4}=1-2=-1$

APÉNDICE 3: ***Teoremas de Unicidad para el problema de difusión del calor y en la ecuación de ondas.***

Sea K un recinto compacto en $\Re^3$. En los dos casos que vamos a tratar aquí, tal como hemos visto con la ecuación de Laplace, la unicidad es consecuencia inmediata de la unicidad para las condiciones de contorno e iniciales nulas (caso en que la única solución posible es la nula, como se demuestra a continuación):

(I) ECUACIÓN DE ONDAS:

$(i)\ \Delta u(x,y,z,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,y,z,t) \quad ,(x,y,z)\in K, t\geq 0$

$(ii)\ u_{|\partial K\times[0,+\infty)}=0$

$(iii)\ u(x,y,z,0)=\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,z,0)=0 \quad ,(x,y,z)\in K$

Probemos que la única solución de este problema es la función nula. De (*ii*) se deduce que $\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,z,t)=0$ para todo $(x,y,z)\in\partial K$ y todo $t\geq 0$. Análogamente, de (*iii*) se deduce que $\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,z,0)=\frac{\partial}{\partial y}u(x,y,z,0)=\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,z,0)=0$ para todo $(x,y,z)\in K$, es decir: $\vec{\nabla}u(x,y,z,0)=\vec{0}$ para todo $(x,y,z)\in K$.

La divergencia del campo $\vec{f}=\frac{\partial u}{\partial t}\vec{\nabla}u$ es

$$div(\vec{f})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2+\frac{\partial u}{\partial t}\Delta u\overset{(i)}{=}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

Del teorema de la divergencia obtenemos (para cada $t>0$) :

$$\iint_{\partial K}\overbrace{<\tfrac{\partial u}{\partial t}\vec{\nabla}u,\breve{\eta}>}^{0}d\sigma=\tfrac{1}{2}\iiint_K\tfrac{\partial}{\partial t}\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2dv+\tfrac{1}{2}\iiint_K\tfrac{\partial}{\partial t}\left[\left(\tfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dv$$

y resulta

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_K\left[\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2+\left(\tfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dv\right)$$

Entonces, la función $h(t)=\iiint_K\left[\left\|\vec{\nabla}u(x,y,z,t)\right\|^2+\left(\tfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)\right)^2\right]$ tiene derivada nula en el intervalo $[0,+\infty)$ y por lo tanto es constante. Puesto que hemos visto que $\vec{\nabla}u(x,y,z,0)=\vec{0}$ y $\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,z,t)=0$ para todo $(x,y,z)\in K$, resulta $h(0)=0$ y por ser constante es entonces idénticamente nula. Es decir: hemos demostrado que $\iiint_K\left[\left\|\vec{\nabla}u(x,y,z,t)\right\|^2+\left(\tfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)\right)^2\right]=0$ para todo $t\geq 0$. Puesto que el integrando es no negativo y continuo, se deduce que $\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2+\left(\tfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2=0$ idénticamente en el conexo $K\times[0,+\infty)$. Pero entonces resulta u constante en $K\times[0,+\infty)$ y por ser nula en la frontera, es u idénticamente nula. ■

(II) ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DEL CALOR:

$(i)\ \Delta u(x,y,z,t)=\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,y,z,t) \quad ,(x,y,z)\in K, t\geq 0$

$(ii)\ u_{|\partial K\times[0,+\infty)}=0$

$(iii)\ u(x,y,z,0)=0 \quad ,(x,y,z)\in K$

Demostremos que la única solución de este problema es la función nula. La divergencia del campo $\vec{f}=u\vec{\nabla}u$ es

$$div(\vec{f})=\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2+u\,\Delta u\overset{(i)}{=}\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2+u\frac{\partial u}{\partial t}=\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[u^2\right]$$

Del teorema de la divergencia obtenemos (para cada $t>0$) :

$$\iint_{\partial K}\overbrace{<u\vec{\nabla}u,\breve{\eta}>}^{0}d\sigma=\iiint_{K}\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2dv+\tfrac{1}{2}\iiint_{K}\tfrac{\partial}{\partial t}\left[u^2\right]dv$$

y resulta

$$0=\iiint_{K}\left\|\vec{\nabla}u(x,y,z,t)\right\|^2dxdydz+\tfrac{1}{2}\iiint_{K}\tfrac{\partial}{\partial t}\left[u^2(x,y,z,t)\right]dxdydz$$

para todo $t\geq 0$. Integrando respecto de t entre 0 y t_1 (positivo y arbitrario):

$$0=\iiint_{K}\int_{0}^{t_1}\left\|\vec{\nabla}u(x,y,z,t)\right\|^2dxdydzdt+\tfrac{1}{2}\iiint_{K}\left[u^2(x,y,z,t_1)-\overbrace{u^2(x,y,z,0)}^{=0}\right]dxdydz$$

Por lo tanto, para todo $t_1>0$:

$$0=\iiint_{K}\left[\int_{0}^{t_1}\left\|\vec{\nabla}u(x,y,z,t)\right\|^2dt+\tfrac{1}{2}u^2(x,y,z,t_1)\right]dxdydz$$

Puesto que el integrando es continuo y no negativo (pues por ser $t_1>0$ es $\int_{0}^{t_1}\left\|\vec{\nabla}u(x,y,z,t)\right\|^2dt\geq 0$) , necesariamente se tiene

$$\int_0^{t_1} \left\| \vec{\nabla} u(x,y,z,t) \right\|^2 dt + \tfrac{1}{2} u^2(x,y,z,t_1) = 0$$

para todo $(x,y,z) \in K$ y todo $t_1 > 0$. Entonces, resulta u idénticamente nula. ■

APÉNDICE 4: ***Deducción extremadamente simplificada de la ecuación de difusión del calor.***

Sean:

1) $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^3$: cuerpo sólido homogéneo y $V \subseteq \mathbb{K}$ un cuerpo cualquiera contenido en $\mathbb{K}$.

2) δ = densidad de masa del cuerpo (unidades: masa/volumen). Se supone constante (homogeneidad).

3) $\vec{q}(t,x,y,z) = -\kappa \vec{\nabla} u(t,x,y,z)$: flujo de calor, donde $u(t, x, y, z)$ es la temperatura y $\kappa > 0$ es una constante denominada "conductividad térmica" (***Ley de Fourier***).

4) El flujo de energía a través de cada $V \subseteq \mathbb{K}$ hacia <u>el interior</u> de V es

$$Flujo(t,V) = -\kappa \oiint_{\partial V} \vec{q}.\breve{\eta}_{ext} da = \kappa \oiint_{\partial V} \vec{\nabla} u.\breve{\eta}_{ext} da$$

5) Energía térmica total en cada $V \subseteq \mathbb{K}$:

$$E(t,V) = c_e \iiint_V u(t,x,y,z) \delta \, dxdydz$$

donde c_e es una constante positiva (= calor específico).

6) Ley de conservación (en ausencia de fuentes): $\dfrac{\partial}{\partial t} E(t,V) = Flujo(t,V)$. Es decir:

$$c_e \iiint_V \tfrac{\partial}{\partial t} u(t,x,y,z) \delta \, dxdydz = \kappa \oiint_{\partial V} \vec{\nabla} u.\breve{\eta}_{ext} da = \kappa \iiint_V \Delta u(t,x,y,z) dxdydz$$

Como esto debe verifcarse para todo cuerpo $V \subseteq \mathbb{K}$: $c_e \delta \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x,y,z) = \kappa \Delta u(t,x,y,z)$, es decir:

$$\Delta u(t,x,y,z) - \tfrac{c_e \delta}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x,y,z) = 0$$
